

Санкт Петербургский государственный университет
Физический факультет
Кафедра Радиопизики



**Аналитическое и численное
моделирование модовых групп большой
мощности в диэлектрических
волноводах**

Диплом на соискание степени бакалавра

Выполнил:

студент группы 14.Б01-фз(401)
Брянцев Дмитрий Михайлович

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук
в.н.с. Бисярин Михаил Александрович

Рецензент:

Кандидат физико-математических наук
доцент Ушаков Николай Александрович

Санкт-Петербург
2018

Оглавление

Введение	4
1 Литературный обзор	5
2 Волноводы с квадратичным профилем показателя преломления	7
2.1 Моды диэлектрических волноводных структур и модовые группы цилиндрических волноводов с квадратичным профилем показателя преломления	7
2.2 Постоянные распространения и эффективные показатели преломления мод цилиндрического волновода с квадратичным профилем показателя преломления при учете оболочки	10
2.2.1 Вывод характеристического уравнения	11
2.2.2 Решение характеристического уравнения	15
2.2.3 Анализ модовой структуры	15
3 Волноводы со ступенчатым профилем показателя преломления	19
3.1 Вывод характеристического уравнения	19
3.2 Результаты решения характеристического уравнения	21
3.3 Сравнение со случаем квадратичного профиля	26
4 Оценки параметров распространения для импульсов большой мощности	28
Заключение	29
Приложение	31
Благодарность	32
Литература	33

Введение

Данная дипломная работа посвящена особенностям распространения сигналов в цилиндрических диэлектрических волноводах, в том числе и в нелинейном режиме.

При решении задачи о распространении светового импульса в волноводе, принято рассматривать распределение поля для заданной оптической частоты, особый интерес представляют распределения, которые не изменяются во время распространения, если не считать общего изменения фазы. Такие распределения поля связаны с так называемыми модами волновода. Моды с идентичной или схожей константой распространения, в свою очередь, объединяются в модовые группы.

Благодаря наличию диэлектрического заполнения можно создавать волноводы с различными зависимостями показателя преломления в поперечном сечении волновода. Обычно ограничиваются только зависимостями от радиальной координаты, такую зависимость называют профилем показателя преломления волновода. Изучение структур модовых групп для волноводов с различными профилями показателя преломления представляет большой интерес, в первую очередь в целях повышения их пропускающей способности как канала связи.

Цель данной работы - рассмотреть и сравнить структуры модовых групп в двух наиболее распространенных типах оптических волокон: в волноводе с квадратичным и со ступенчатым профилем показателя преломления. Для выполнения этой задачи нам необходимо решить несколько подзадач:

1. Выяснить поведение константы распространения для каждой моды в зависимости от параметров волновода.
2. На основе имеющейся информации объединить моды в модовые группы.
3. Оценить разбросы постоянных распространения мод внутри модовых групп.
4. Сравнить модовые группы для волноводов с различными профилями показателя преломления.

ГЛАВА 1

Литературный обзор

Оптическое волокно - цилиндрический диэлектрический волновод, переносящий информационные световые сигналы. В настоящее время оптическое волокно может считаться самой перспективной средой для передачи больших потоков информации на значительные расстояния - это связано, в первую очередь, с широкой полосой пропускания сигнала при относительно низких потерях. Благодаря этой особенности оптические волноводы, например, заменили собой подводные кабели межконтинентального сообщения.

Использование оптического волокна для связи было впервые предложено сотрудниками Corning Glass Works в 1970-х годах [1]. Им удалось изготовить волокно с потерями менее 20 дБ/км в одномодовом режиме, и с тех пор интерес к использованию оптоволокон как основного средства для надежной и быстрой передачи информации только возрастал, что послужило толчком к развитию теории оптических волноводов в целом.

На сегодняшний день базовая теория оптических волноводов достаточно разработана [2, 3, 4], но развитие оптических волноводов продолжается:

- В работе [5] авторами рассматривается производство волноводов из полимерных материалов с целью повышения их доступности.
- В статье [6] авторы сообщают о достижении пропускной способности ступенчатого оптоволокон 18 Тб/с на дистанции 310 Км и 23 Тб/с на дистанции 17 Км.
- В работе [7] авторы регистрируют уровень пропускной способности 4×10 Тб/с на стандартном неспециализированном оборудовании. Это достигается за счет использования четырех модовых групп как независимых каналов передачи.

Как отмечают авторы [8] - производительность многомодовых систем нового поколения ограничена преимущественно волоконной дисперсией и нелинейными эффектами. Нелинейные эффекты смягчаются с помощью оптимизации мощности пуска оптического излучения, в случае же дисперсии необходимо минимизировать расхождение в скорости распространения мод, из которых состоит распространяющийся по волокну волновой пакет. Это задача напрямую связана с темой нашей работы, поскольку с помощью использования мод одной модовой группы можно добиться уменьшения межмодовой дисперсии, что напрямую ведет к увеличению полосы пропускания.

Исследование по уменьшению межмодовой дисперсии логично начать с рассмотрения модельной задачи о волноводе с квадратичным профилем показателя преломления без оболочки, т.к. для такого волновода можно чисто

аналитически найти как структуру каждой моды, так и ее константу распространения (эта задача будет позднее рассмотрена нами в деталях). Более того, в этом конкретном случае нескольким модам соответствует одна и та же константа распространения - и, следовательно, для этих мод межмодовая дисперсия отсутствует (происходит так называемое вырождение решений). Эти наборы мод с одинаковыми константами (а следовательно и с одинаковыми скоростями) распространения мы называем модовыми группами.

Зная это, мы можем задать новые вопросы относительно реальных волноводов, например:

1. Как эти модовые группы расщепляются при учете оболочки?
2. Можно ли выделить схожие группы для волноводов с другими профилями показателя преломления (в частности для волновода со ступенчатым показателем преломления как для самого широко применяемого).

В литературе эта проблема традиционно решалась приближенными методами. Так например в работе [2] вместо целочисленных номеров мод, получающихся напрямую в процессе решения дифференциального уравнения, в следствии применения метода ВКБ для учета остаточных членов вводятся "вещественные" номера мод - что физически некорректно, но все же позволяет получать адекватные результаты при практическом применении этой методики. Такой подход к решению задачи имеет свои внутренние проблемы:

1. Этот метод ничего не говорит нам о структуре мод в волноводе, а лишь позволяет описать параметры ее распространения опираясь на приближенное решение.
2. Плохая масштабируемость - при попытке увеличить точность определения константы распространения моды задачу приходится решать с самого начала.

Наша задача в этой работе - исследовать реальные моды распространяющиеся в цилиндрических волноводах аналитически и численно, что решит вышеуказанные проблемы.

ГЛАВА 2

Волноводы с квадратичным профилем показателя преломления

Волноводы для ЭМ волн радиодиапазонов имеют металлические стенки и, как правило, их заполнение представляет собой однородную среду. Использование диэлектрика в качестве материала заполнения открывает новые возможности, позволяя создать заполнение с показателем преломления, непостоянным в поперечном сечении. Волноводы, в которых используется этот принцип называются градиентными. Профиль показателя преломления таких волноводов, как можно видеть в работах [6, 9, 10, 11], может быть довольно разнообразным, однако часто рассматривают волноводы с квадратичным профилем показателя преломления как наиболее простые и допускающие аналитические выражения для постоянных распространения и модовых функций.

2.1 Моды диэлектрических волноводных структур и модовые группы цилиндрических волноводов с квадратичным профилем показателя преломления

Решение задачи о распространении волны в волноводе - решение дифференциального волнового уравнения, удовлетворяющее определённым граничным условиям.

$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

Где $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$ - фазовая скорость распространения волны в среде, c - скорость света в вакууме, ϵ, μ - относительные электрическая и магнитная проницаемости (заметим, что в оптических диэлектрических волноводах среда не магнитна, т.е. $\mu = 1$), u - искомое волновое поле, t - время. Оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Для решения трехмерной задачи о распространении световой волны в оптическом волноводе введем цилиндрическую систему координат. В случае цилиндрической системы координат оператор Лапласа выглядит как

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.2)$$

Тогда уравнение (2.1) запишется как

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.3)$$

Далее будем искать решение задачи о распространении мод в волноводе в

виде

$$u = AF(r)e^{i\nu\phi}e^{i(\beta z - \omega t)}, \text{ где } F(r) - \text{нормированная функция.}$$

Из вида решения ясно, что можно записать $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\beta^2 u$ и $\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 \varepsilon \mu$.
Теперь мы можем переписать уравнение (2.3) как

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \left(\kappa^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) F = 0, \quad (2.4)$$

$$\text{где } \kappa^2 = k^2 - \beta^2$$

Параметр β - постоянная распространения в направлении оси z ,
параметр $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ - так называемое волновое число. Введем обозначение
 $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ - показатель преломления среды, и обозначим изменение показателя преломления как $n(r)$ - это и будет профиль нашего волновода. n_0 - значение показателя преломления на оси волновода, n_1 - значение показателя преломления в радиусе a от оси волновода.

Тогда уравнение (2.4) запишется как

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \left(k^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) F = 0 \quad (2.5)$$

Введем Δ, V, ρ , такие что

$$\Delta = \frac{n_0^2 - n_1^2}{2n_0^2}, \quad V = kan_0\sqrt{2\Delta}, \quad \rho = \frac{Vr^2}{a^2} \quad (2.6)$$

где Δ - относительный показатель преломления, V - нормализованная частота, ρ - безразмерная радиальная переменная.

Подставим в уравнение (2.5) замены (2.6), и выражение модельного параболического профиля показателя преломления $n^2(r) = n_0^2 - \frac{V\rho}{k^2 a^2}$ (**Рис. 2.1**)

В таком случае уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \left(k^2 n_0^2 - \frac{V\rho}{a^2} - \beta^2 - \frac{\nu^2 V}{\rho a} \right) F = 0 \quad (2.7)$$

Для этого конкретного случая собственные числа находятся чисто аналитически (см. Приложение)

$$\beta_{\nu\mu}^2 = k^2 n_0^2 - \frac{2V}{a^2} (2\mu + \nu + 1) \quad (2.8)$$

где $2\mu + \nu + 1 \leq \frac{V}{2}$ (это ограничение обусловлено тем, что у моды, распространяющейся по волноводу, $kn_0 \geq \beta \geq kn_1$.)

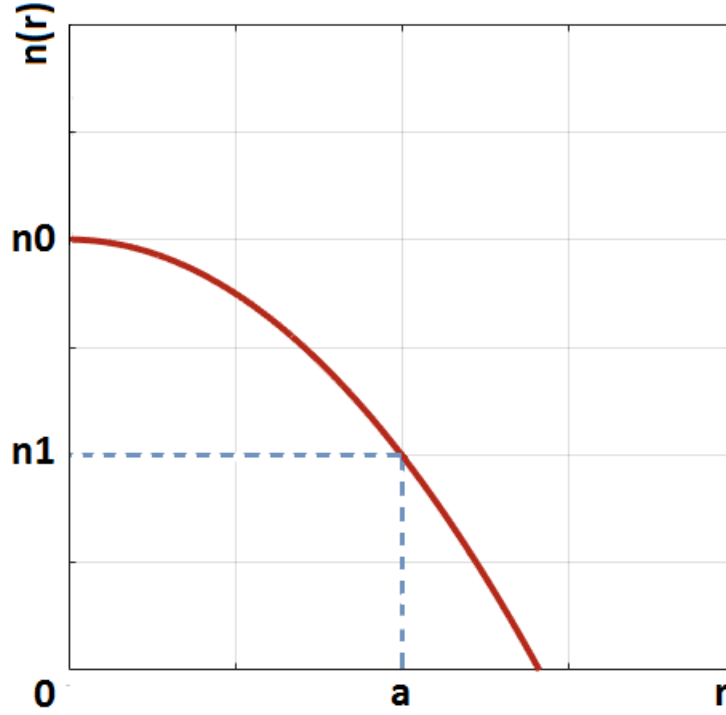


Рис. 2.1: Профиль показателя преломления параболического волновода без оболочки

Можно видеть, что собственные числа объединяются в группы с одинаковыми групповыми номерами $2\mu + \nu + 1$ так, что

$$\dots = \beta_{(\nu+2)(\mu-1)} = \beta_{\nu\mu} = \beta_{(\nu-2)(\mu+1)} = \dots$$

Далее, каждой моде соответствует свой эффективный показатель преломления $n_{\nu\mu}$, где $n_{\nu\mu} = \beta_{\nu\mu}/k$.

Таким образом, каждой моде можно поставить в соответствие эффективный показатель преломления, который задается выражением

$$n_{\nu\mu}^2 = n_0^2 - \frac{2V}{k^2 a^2} (2\mu + \nu + 1) \quad (2.9)$$

Так же можно получить [12] выражение функции для распределения волнового поля в поперечном сечении волновода

$$F_{\nu\mu}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{q_\nu \pi \mu! (\mu + \nu)!}} \rho^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}} \sum_{s=0}^{\mu} (-1)^s \frac{\mu! (\mu + \nu)!}{s! (\mu - s)! (\nu + s)!} \rho^s, \quad (2.10)$$

$$\text{где } q_\nu = \begin{cases} 2 & (\nu = 0) \\ 1 & (\nu \neq 0) \end{cases}$$

2.2 Постоянные распространения и эффективные показатели преломления мод цилиндрического волновода с квадратичным профилем показателя преломления при учете оболочки

Рассмотрим решение задачи для более реальной модели градиентного волновода - волновода с квадратичным профилем показателя преломления при учете оболочки. Используем результаты предыдущего раздела до уравнения (2.5)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \left(k^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) F = 0$$

Подставим в это уравнение квадратичный профиль показателя преломления с учетом оболочки (**Рис. 2.2**), задающийся как

$$\begin{cases} n(\rho) = \sqrt{n_0^2 - \frac{V\rho}{k^2 a^2}} & (0 \leq \rho \leq V) \\ n(\rho) = n_1 & (V \leq \rho < \infty) \end{cases} \quad (2.11)$$

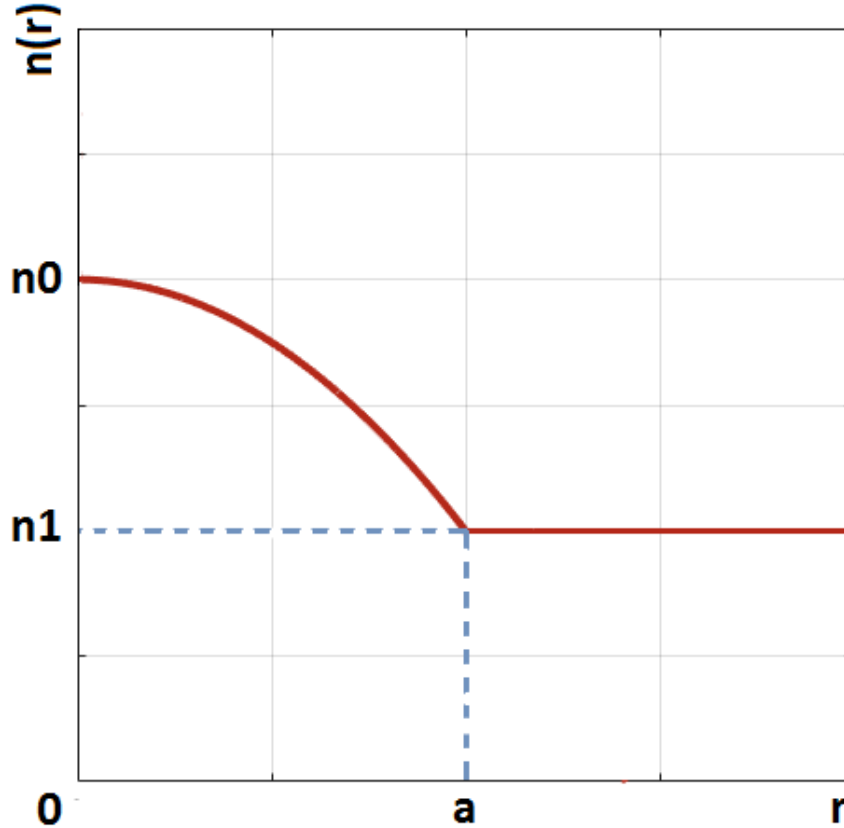


Рис. 2.2: Профиль показателя преломления параболического волновода с оболочкой

2.2.1 Вывод характеристического уравнения

Вследствие несложных преобразований мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \left(k^2 n_0^2 - \frac{V\rho}{a^2} - \beta^2 - \frac{\nu^2 V}{\rho a} \right) F = 0 & (0 \leq \rho \leq V) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \left(k^2 n_1^2 - \beta^2 - \frac{\nu^2 V}{\rho a} \right) F = 0 & (V \leq \rho < \infty) \end{cases} \quad (2.12)$$

Из физических соображений будем искать решение этой системы такое, что

1. Решение первого уравнения в точке $\rho = 0$ конечно.
2. Решение второго уравнения стремится к нулю при $\rho \rightarrow \infty$.
3. В точке $\rho = V$ общее решение должно быть непрерывно вместе со своей производной.

Рассмотрим каждое из уравнений отдельно.

Запишем первое из уравнений (2.12)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \left(k^2 n_0^2 - \frac{V\rho}{a^2} - \beta^2 - \frac{\nu^2 V}{\rho a} \right) F = 0 \quad (2.13)$$

Будем искать $F(\rho)$ в виде

$$F(\rho) = \rho^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}} \mathcal{F}(\rho) \quad (2.14)$$

Тогда уравнение переписывается как

$$\rho \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \rho^2} + (\nu + 1 - \rho) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho} - \left(\frac{\nu + 1}{2} - \frac{V(k^2 n_0^2 - \beta^2)}{8\Delta k^2 n_0^2} \right) \mathcal{F} = 0 \quad (2.15)$$

Для упрощения выражения (2.15), введем параметры $x_{\nu\mu}$ и $y_{\nu\mu}$ таким образом, что

$$y_{\nu\mu}^2 = \frac{V^2(n_{\nu\mu}^2 - n_1^2)}{2\Delta n_0^2} \quad x_{\nu\mu}^2 = \frac{V^2(n_0^2 - n_{\nu\mu}^2)}{2\Delta n_0^2} \quad (2.16)$$

Такая замена позволяет нам абстрагироваться от конкретных параметров волновода при решении задачи и будет удобна в дальнейшем.

Заметим, что при такой подстановке выполняется соотношение (2.17) - это так же будет полезно в дальнейших рассуждениях

$$x_{\nu\mu}^2 + y_{\nu\mu}^2 = V^2 \quad (2.17)$$

Подставим x из (2.16) в уравнение (2.15), тогда уравнение (2.15) переписывается как

$$\rho \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \rho^2} + (\nu + 1 - \rho) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho} - \left(\frac{\nu + 1}{2} - \frac{x^2}{4V} \right) \mathcal{F} = 0 \quad (2.18)$$

Уравнение (2.18) – вырожденное гипергеометрическое уравнение, его решение – вырожденная гипергеометрическая функция (представляется рядом (2.19))

$$\mathcal{F}(a | c | \rho) = 1 + \frac{a}{c}\rho + \frac{1}{2!} \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\rho^2 + \frac{1}{3!} \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)}\rho^3 + \dots \quad (2.19)$$

$$\text{Где } a = -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2V} - \nu - 1 \right), c = \nu + 1, \rho = V$$

Теперь рассмотрим второе уравнение из системы (2.12)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \left(k^2 n_1^2 - \beta^2 - \frac{\nu^2 V}{\rho a} \right) F = 0 \quad (2.20)$$

Это уравнение - уравнение Бесселя, из всех его решений условию $F(\infty) = 0$ удовлетворяет только $K_\nu \left(\frac{\sqrt{(\beta^2 - k^2 n_1^2) a^2 \rho}}{\sqrt{V}} \right)$, где K_ν - функция Макдональда.

Теперь, когда нам известны решения уравнений (2.13) и (2.20), мы можем "сшить" эти уравнения в точке $r = a$ (или $\rho = V$).

Для этого потребуем выполнения равенства функций и их производных в точке сшивания, также применим замены (2.16) для упрощения выражений.

$$\begin{cases} F(\rho) = K_\nu(y\sqrt{\frac{\rho}{V}}) \\ \frac{\partial}{\partial \rho} F(\rho) = \frac{\partial}{\partial \rho} K_\nu(y\sqrt{\frac{\rho}{V}}) \end{cases} \quad \text{при } \rho = V \quad (2.21)$$

Для решения этой системы применим аналитические формулы производных \mathcal{F} и K_ν

$$\mathcal{F}'(a | c | \rho) = \frac{a}{c} \mathcal{F}(a+1 | c+1 | \rho) \quad (2.22)$$

$$K'_\nu(y) = \frac{\nu}{y} K_\nu(y) - K_{\nu+1}(y) \quad (2.23)$$

Соотношение (2.22) можно получить с помощью несложных вычислений из определения (2.19), в то время как соотношение (2.23) нам известно из теории цилиндрических функций [13].

Таким образом, система (2.21) сводится к характеристическому уравнению (2.24)

$$\begin{aligned} & \mathcal{F} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2V} - \nu - 1 \right) | \nu + 1 | V \right) \times (y K_{\nu+1}(y) - V K_\nu(y)) - \\ & \frac{V}{\nu + 1} \left(\frac{x^2}{2V} - \nu - 1 \right) \times \mathcal{F} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2V} - \nu - 1 \right) | \nu + 2 | V \right) \times K_\nu(y) = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Для удобства анализа этого уравнения воспользуемся равенством (2.17) и получим уравнение

$$\begin{aligned} & \mathcal{F} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{V^2 - y_{\nu\mu}^2}{2V} - \nu - 1 \right) \mid \nu + 1 \mid V \right) \times \\ & (y_{\nu\mu} K_{\nu+1}(y_{\nu\mu}) - V K_{\nu}(y_{\nu\mu})) - \frac{V}{\nu + 1} \left(\frac{V^2 - y_{\nu\mu}^2}{2V} - \nu - 1 \right) \times \\ & \mathcal{F} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{V^2 - y_{\nu\mu}^2}{2V} - \nu - 1 \right) \mid \nu + 2 \mid V \right) \times K_{\nu}(y_{\nu\mu}) = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Из соотношений (2.16) видно, что мы можем записать зависимость $n_{\nu\mu}$ от $y_{\nu\mu}$ как

$$n_{\nu\mu}^2 = n_1^2 + \frac{y_{\nu\mu}^2}{k^2 a^2} \quad (2.26)$$

Следовательно, зная зависимость $y_{\nu\mu}$, мы можем рассчитать постоянную распространения любой моды в волноводе с квадратичным профилем показателя преломления с учетом оболочки для любой конфигурации этого волновода. Эту зависимость как раз можно найти решая характеристическое уравнение (2.25). Вышеназванное уравнение является трансцендентным, для его решения мы можем использовать численные методы.

Можно так же отметить, что зная эффективные показатели преломления $n_{\nu\mu}$ из (2.26) и используя замену (2.16), мы теперь можем найти явный вид гипергеометрической функции (2.19), а, значит, и полное выражение для поля (2.14) - и построить нормированное распределение поля для интересующих нас мод, например:

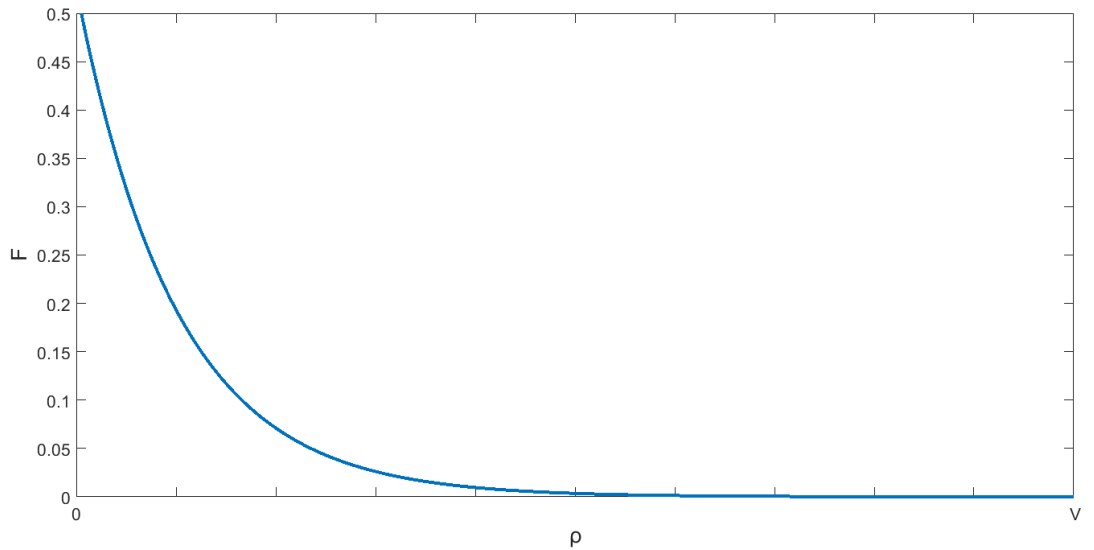


Рис. 2.3: График поведения $F_{\nu\mu}(\rho)$ для моды 0 0 в случае квадратичного профиля показателя преломления

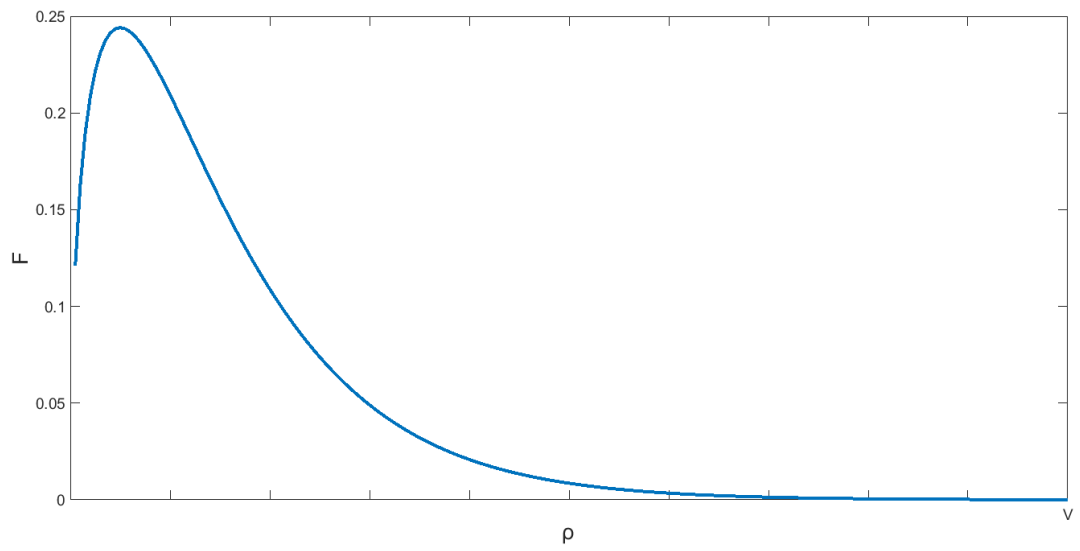


Рис. 2.4: График поведения $F_{\nu\mu}(\rho)$ для моды $1\ 0$ в случае квадратичного профиля показателя преломления

2.2.2 Решение характеристического уравнения

Мы будем решать характеристическое уравнение средствами пакета MATLAB 2017a, т.к. он обеспечивает все необходимые для анализа функции и очень удобен в анализе и представлении полученных данных.

Как можно видеть из (2.16), $y_{\nu\mu}$ зависит только от V и набора констант (включая $n_{\nu\mu}$, нахождение которого является нашей конечной целью), следовательно мы можем решать уравнение (2.25) с помощью создания мелкой сетки по V , при этом корни уравнения будем находить следя за сменой знака характеристической функции, рассчитанной на узлах сетки. Нули, локализованные с помощью сеточного метода, будем уточнять методом дихотомии (единственный применимый в данной ситуации метод, т.к. нам неизвестно ничего о производной характеристической функции) до нужной нам степени точности. Проведем эту операцию для каждого ν , при этом параметр μ отвечает за номер нуля.

В результате вышеописанной операции нам будет известна зависимость $y_{\nu\mu}(V)$, по которой мы с помощью выражения (2.26) можем без труда рассчитать эффективный показатель преломления моды с номерами ν, μ для рассмотренного волновода с любыми параметрами.

2.2.3 Анализ модовой структуры

Поскольку модель волновода с квадратичным профилем показателя преломления без учёта оболочки широко распространена в практических приложениях, естественно ожидать, что при учёте оболочки решение исказится незначительно. Проверим, так ли это, построив график (**Рис. 2.5**) зависимости $y_{\nu\mu}(V)$ для мод, которые состояли бы в модовой группе с групповым номером $(2\mu + \nu + 1) = 5$ согласно модели о волноводе с квадратичным профилем показателя преломления без учета оболочки (из замены (2.16) можно видеть, что при равенстве $n_{\nu\mu}(V)$, $y_{\nu\mu}(V)$ для этих мод так же должны совпадать), и оценим изменения внесенные в поведение $y_{\nu\mu}(V)$ учетом оболочки волновода в рассмотренной модели.

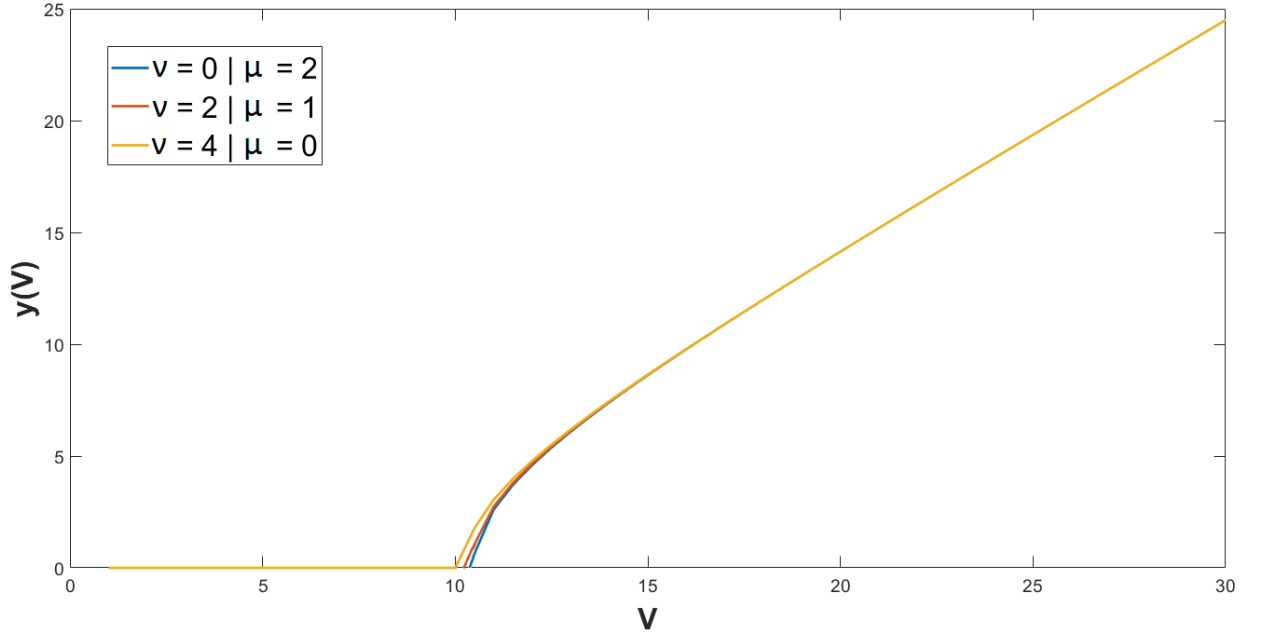


Рис. 2.5: График поведения $y_{\nu\mu}(V)$ для мод из модовой группы с групповым номером 5 для квадратичного волновода с учетом оболочки

Как можно видеть из графика (2.5) - $y_{\nu\mu}(V)$ лишь немного отклоняются друг от друга и при увеличении V , сходятся все ближе. Это можно было предполагать на основании решения модельной задачи о волноводе с квадратичным профилем показателя преломления без учета оболочки.

Из графика (**Рис. 2.5**) также можно видеть нормализованную частоту V_{cutoff} отсечки моды. В данном случае для всех мод $V_{cutoff} \approx 10$ (они также представлены на таблице 2.1), в случае же модели без оболочки, как можно видеть из ограничения на формулу (2.8) - $V_{cutoff} = 10$

ν	0	2	4
μ	2	1	0
V_{cutoff}	10.46	10.4	10.23

Таблица 2.1: Частоты отсечки мод из модовой группы с групповым номером 5 для квадратичного волновода с учетом оболочки

Проведем сравнительную оценку полученных эффективных показателей преломления $n_{\nu\mu}$ - для волновода с учетом оболочки и $n_{\nu\mu}^{model}$ - без учета, начиная с частоты близкой к частоте отсечки. Все расчеты здесь и далее будут производиться для значений $n_0 = 1.48$, $n_1 = 1.44$.

V	n_{02}	$n_{02} - n_{02}^{model}$	n_{21}	$n_{21} - n_{21}^{model}$	n_{40}	$n_{40} - n_{40}^{model}$
11	1.4422	-1.3×10^{-3}	1.4425	-1.1×10^{-3}	1.4431	-5.6×10^{-4}
16	1.4550	-6.3×10^{-5}	1.4550	-4.9×10^{-5}	1.4551	-1.9×10^{-5}
21	1.4610	-1.6×10^{-6}	1.4610	-1.1×10^{-6}	1.4610	-4.1×10^{-7}
26	1.4647	-2.8×10^{-8}	1.4647	-1.8×10^{-8}	1.4647	-1.0×10^{-9}
31	1.4672	-2.8×10^{-9}	1.4672	-2.8×10^{-9}	1.4672	-2.8×10^{-9}

Таблица 2.2: Значения эффективного показателя преломления $n_{\nu\mu}(V)$ для мод из модовой группы с групповым номером 5 для квадратичного волновода с учетом оболочки

Из таблицы 2.2 можно видеть что эффективные показатели преломления $n_{\nu\mu}$ рассмотренной модовой группы лучше описываются "модельными" показателями преломления $n_{\nu\mu}^{model}$ (а следовательно находятся ближе друг к другу) для большей нормализованной частоты V , в то время как на нормализованных частотах, близких к частоте отсечки, расхождение может быть довольно значительным (порядка 10^{-3}).

Теперь, чтобы проанализировать, как изменяется структура модовых групп с повышением группового номера, рассмотрим моды, находящиеся в модовой группе с групповым номером 11.

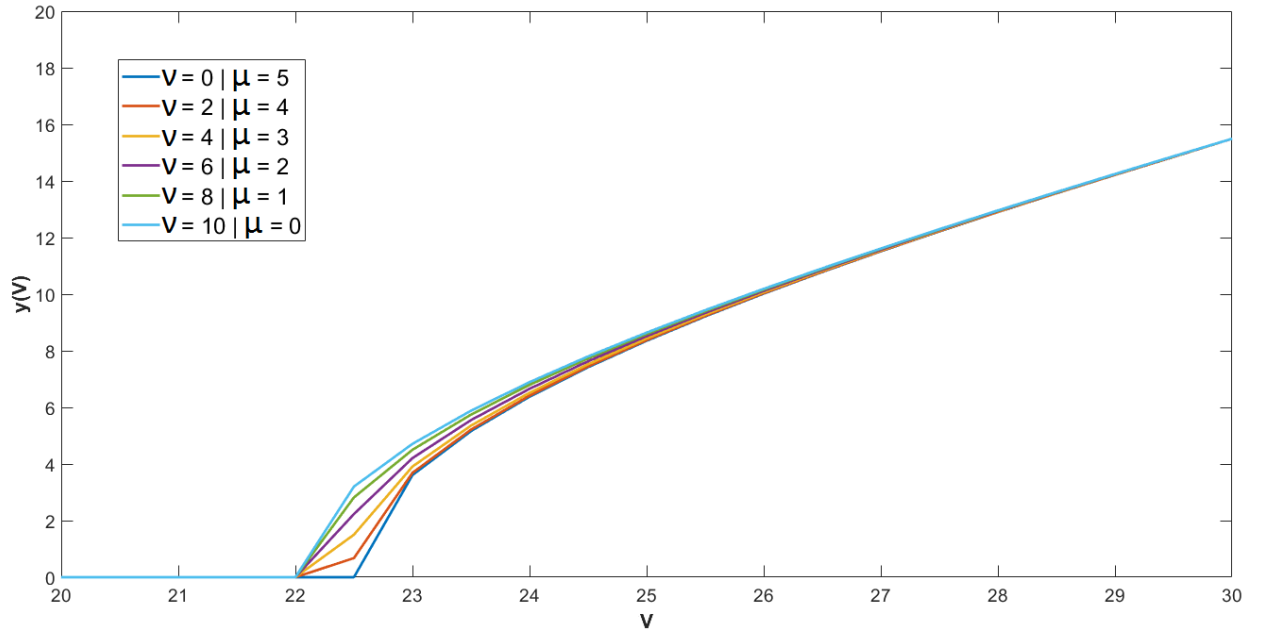


Рис. 2.6: График поведения $y_{\nu\mu}(V)$ для мод из модовой группы с групповым номером 11 для квадратичного волновода с учетом оболочки

ν	0	2	4	6	8	10
μ	5	4	3	2	1	0
V_{cutoff}	22.5	22.48	22.41	22.3	22.17	22.05

Таблица 2.3: Частоты отсечки мод из модовой группы с групповым номером 11 для квадратичного волновода с учетом оболочки

V	n_{05}	$n_{05} - n_{05}^{model}$	n_{24}	$n_{24} - n_{24}^{model}$	n_{43}	$n_{43} - n_{43}^{model}$
23	1.4409	-7.6×10^{-4}	1.4410	-7.1×10^{-4}	1.4411	-5.9×10^{-4}
25	1.4445	-3.3×10^{-4}	1.4445	-3.1×10^{-4}	1.4446	-2.4×10^{-4}
27	1.4473	-1.3×10^{-4}	1.4473	-1.2×10^{-4}	1.4473	-9.4×10^{-5}
29	1.4497	-4.8×10^{-5}	1.4497	-4.3×10^{-5}	1.4497	-3.2×10^{-5}
V	n_{62}	$n_{62} - n_{62}^{model}$	n_{81}	$n_{81} - n_{81}^{model}$	$n_{10\ 0}$	$n_{10\ 0} - n_{10\ 0}^{model}$
23	1.4413	-4.0×10^{-4}	1.4415	-2.0×10^{-4}	1.4417	-6.1×10^{-5}
25	1.4446	-1.6×10^{-4}	1.4447	-7.6×10^{-5}	1.4448	-2.0×10^{-5}
27	1.4474	-5.8×10^{-5}	1.4474	-2.5×10^{-5}	1.4474	-6.1×10^{-6}
29	1.4497	-1.9×10^{-5}	1.4497	-7.9×10^{-6}	1.4497	-1.7×10^{-6}

Таблица 2.4: Значения эффективного показателя преломления $n_{\nu\mu}(V)$ для мод из модовой группы с групповым номером 11 для квадратичного волновода с учетом оболочки

Анализируя таблицы 2.1, 2.2, 2.3 и 2.4 можно сделать вывод, что

1. Сильнее всего от модельных решений отклоняются показатели преломления мод с малыми ν и большими μ , и напротив - наименьшее отклонение наблюдается для мод с наибольшими ν и наибольшими μ .
2. При фиксированном V отличие эффективного показателя преломления моды от модельного от модельного увеличивается с ростом группового номера.
3. Частоты отсечек в обоих случаях тем меньше (ближе к модельным), чем больше значение индекса ν (меньше значение μ).

ГЛАВА 3

Волноводы со ступенчатым профилем показателя преломления

Рассмотрим решение задачи для волновода, который чаще всего используется на практике - волновода со ступенчатым профилем показателя преломления. Используем результаты предыдущей главы до уравнения (2.5)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \left(k^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) F = 0$$

Подставим в это уравнение ступенчатый профиль показателя преломления (**Рис. 3.1**), задающийся как

$$n(r) = \begin{cases} n_0 & (0 \leq r \leq a) \\ n_1 & (a \leq r < \infty) \end{cases} \quad (3.1)$$

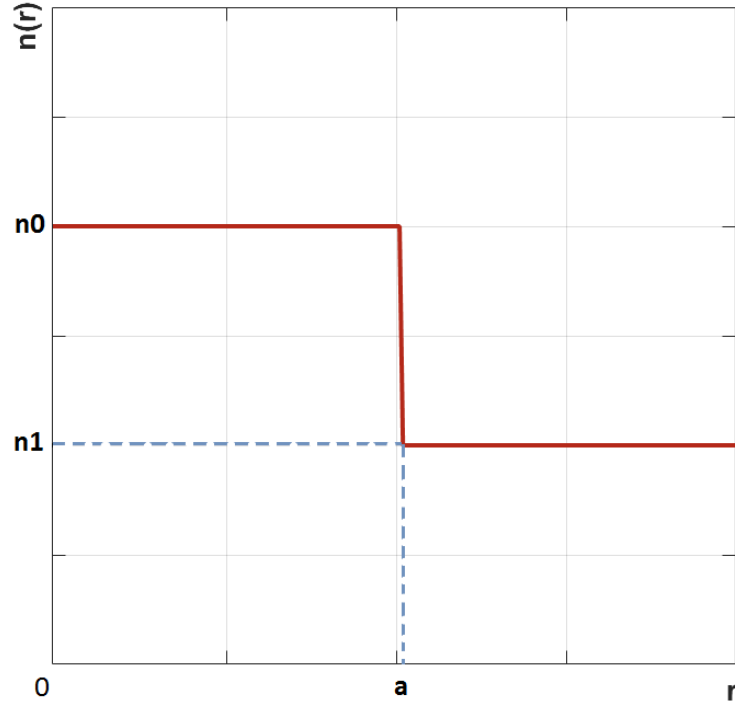


Рис. 3.1: Ступенчатый профиль показателя преломления

3.1 Вывод характеристического уравнения

Естественным образом при подстановке (3.1) в уравнение (2.5) мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \left(k^2 n_0^2 - \beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) F = 0 & (0 \leq r \leq a) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \left(k^2 n_1^2 - \beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) F = 0 & (a \leq r < \infty) \end{cases} \quad (3.2)$$

Оба уравнения - уравнения Бесселя, но, как и в случае системы (2.12) мы должны наложить на эту систему физические ограничения

1. Решение первого уравнения в точке $r = 0$ конечно.
2. Решение второго уравнения стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$.
3. В точке $r = a$ общее решение должно быть непрерывно вместе со своей производной.

Решение первого из уравнений (3.2) будем искать в виде $J_\nu \left(\sqrt{k^2 n_0^2 - \beta^2} r \right)$, где J_ν - функция Бесселя. Мы ищем решение нашего уравнения именно в таком виде, поскольку это единственное решение уравнения, обладающее свойством конечности в $r = 0$.

Решение второго из уравнений (3.2) будем искать в виде $K_\nu \left(\sqrt{\beta^2 - k^2 n_1^2} r \right)$, где K_ν - функция Макдональда (по причине убывания функции на бесконечности).

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} c J_\nu \left(\sqrt{k^2 n_0^2 - \beta^2} a \right) = d K_\nu \left(\sqrt{\beta^2 - k^2 n_1^2} a \right) \\ c \sqrt{k^2 n_0^2 - \beta^2} J'_\nu \left(\sqrt{k^2 n_0^2 - \beta^2} a \right) = d \sqrt{\beta^2 - k^2 n_1^2} K'_\nu \left(\sqrt{\beta^2 - k^2 n_1^2} a \right) \end{cases} \quad (3.3)$$

Воспользуемся заменой (2.16) для упрощения выражений, тогда система уравнений (3.1) сведется к характеристическому уравнению [14]

$$\begin{cases} y_{\nu\mu} J_\nu(x_{\nu\mu}) K_{\nu+1}(y_{\nu\mu}) - x_{\nu\mu} J_{\nu+1}(x_{\nu\mu}) K_\nu(y_{\nu\mu}) = 0 \\ x_{\nu\mu}^2 + y_{\nu\mu}^2 = V^2 \end{cases} \quad (3.4)$$

Это характеристическое уравнение мы можем решить с помощью системы MATLAB 2017a способом, описанным в разделе 2.2.2.

Так же как и в случае задачи для квадратичного волновода, решив уравнение (3.4), мы сможем построить нормированное поперечное распределение поля для мод в волноводе [14]. Совершим замену $\rho = \frac{V r^2}{a^2}$ для единообразия с графиками, изображенными на (Рис. 2.3) и (Рис. 2.4), получим распределения:

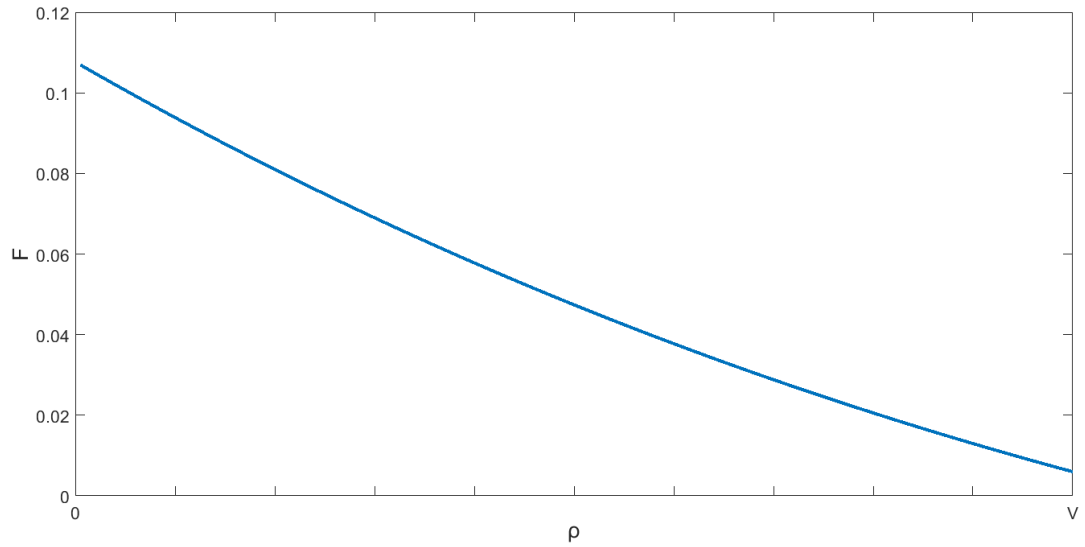


Рис. 3.2: График поведения $F_{\nu\mu}(\rho)$ для моды 0 0 в случае ступенчатого профиля показателя преломления

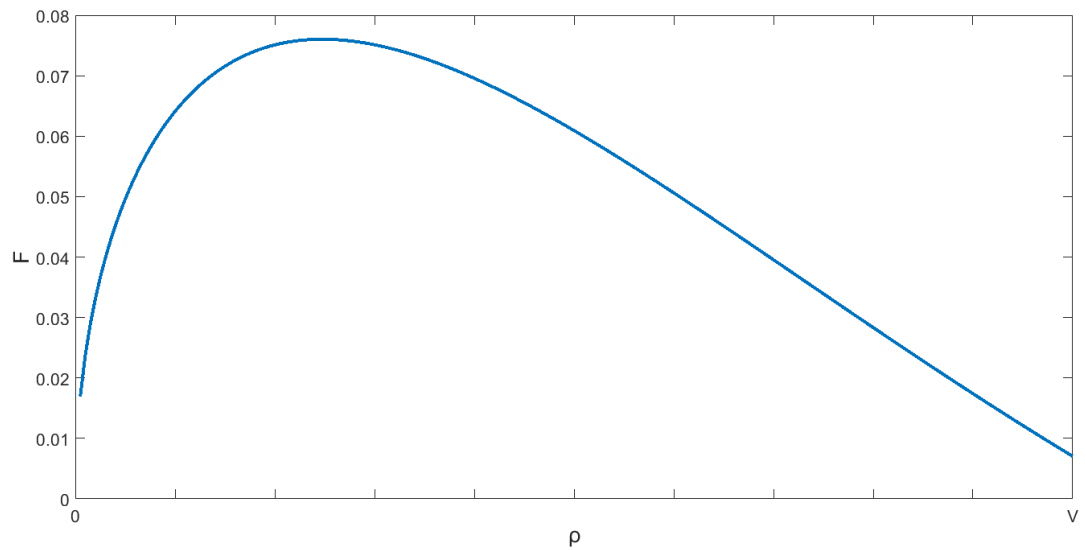


Рис. 3.3: График поведения $F_{\nu\mu}(\rho)$ для моды 1 0 в случае ступенчатого профиля показателя преломления

3.2 Результаты решения характеристического уравнения

Из литературы известно, что моды в ступенчатых волноводах образуют подобие групп [4]. Предположим, что закон объединения групп в моды будет такой же, как и для волноводов с квадратичным профилем показателя преломления - в группы будут объединяться моды с одинаковыми групповыми номерами $2\mu + \nu + 1$. Проверим последствия этого предположения. Рассмотрим поведение $y(V)$ для мод из рядом стоящих групп с номерами 3, 4.

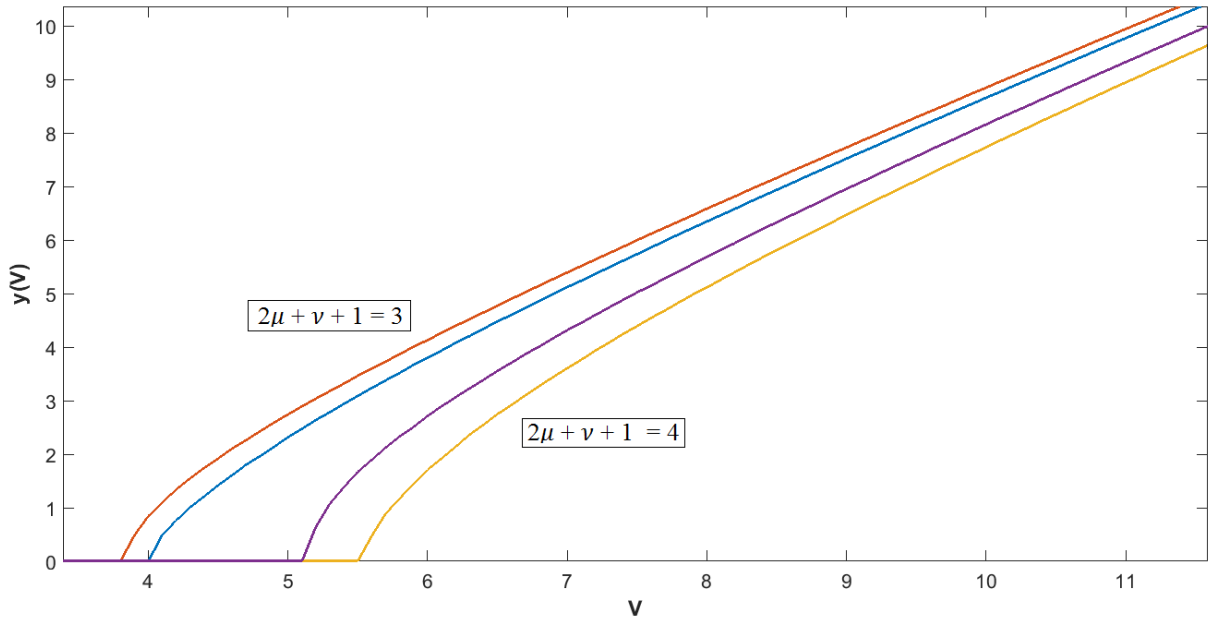


Рис. 3.4: Графики поведения $y(V)$ для двух стоящих рядом мод с групповыми номерами 3 и 4 для ступенчатого волновода

Из графика можно видеть, что разница между $y(V)$ для мод внутри группы меньше, чем для мод находящихся в разных группах, а значит, в соответствии с (2.16) эффективные показатели преломления для мод находящихся внутри одной модовой группы так же ближе. Более того - можно видеть, что расхождения между модами в группах особенно заметны при V , близком к V_{cutoff} . С увеличением групповых номеров группы начинают перекрестываться, и для групп с большими номерами уже сложно выделить какую либо структуру. Тем не менее, даже для мод с большими номерами $2\mu + \nu + 1$ понятие модовой группы имеет смысл, так как

1. Понимание положения моды в группе позволяет оценить V_{cutoff} , и значение $n_{\nu\mu}$ относительно других мод этой группы.
2. Из вида распределения V_{cutoff} на оси V для различных мод одной группы можно видеть, что в дальнейшем возможно создание приближенных формул для вычисления V_{cutoff} моды в зависимости от номера группы в которой она состоит.
3. Из дальнейшего рассмотрения будет видно, что зная значения эффективного показателя преломления $n_{\nu\mu}(V)$ одной моды из группы на удалении от V_{cutoff} , можно использовать их для всех остальных мод в этой группе, при этом погрешности вычисления не будут превышать 10^{-3} .

Рассмотрим поведение $y_{\nu\mu}(V)$, V_{cutoff} и $n_{\nu\mu}(V)$ для мод с групповым номером ($2\mu_1 + \nu_1 + 1 = 5$ и 11). В отличие от случая, описанного в предыдущей

главе, нет такой модельной задачи близкой к случаю ступенчатого профиля показателя преломления, которая решалась бы чисто аналитически. Поэтому, для оценки разброса эффективных показателей преломления $n_{\nu\mu}(V)$ в группе, будем рассчитывать их отклонение не от какого-то модельного решения, а от среднего $n_{\nu\mu}(V)$ в группе.

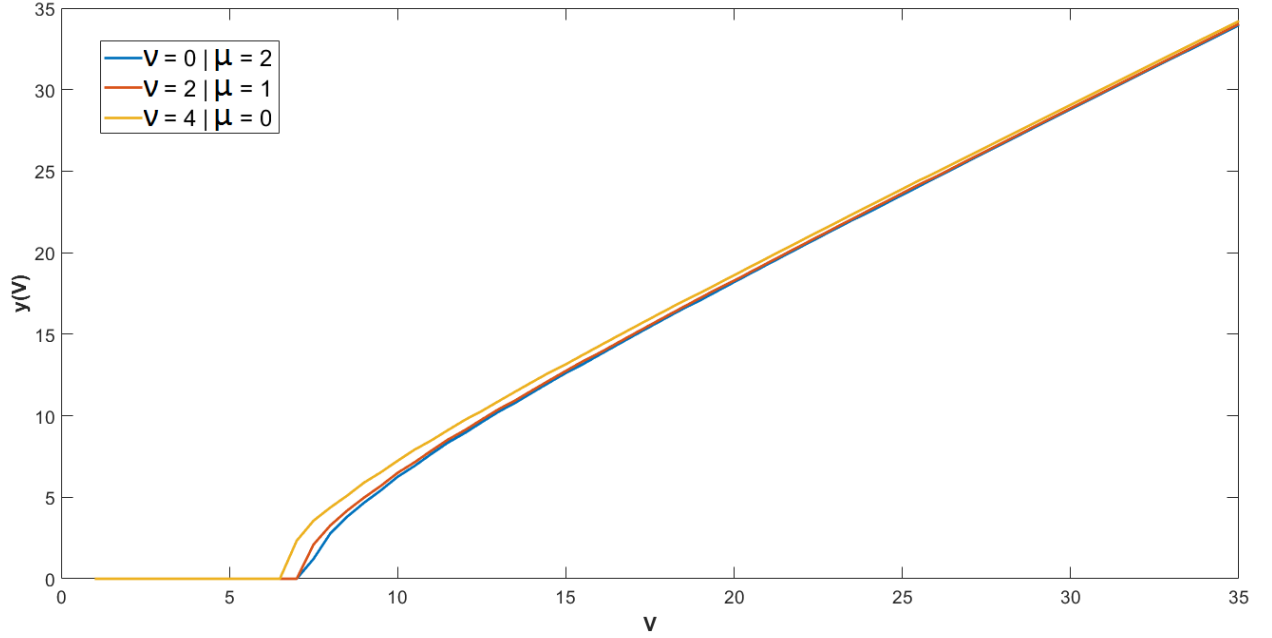


Рис. 3.5: График поведения $y(V)$ для мод с групповым номером 5 для ступенчатого волновода

ν	0	2	4
μ	2	1	0
V_{cutoff}	7.2	7.1	6.4

Таблица 3.1: Частоты отсечки мод из модовой группы с групповым номером 5 для ступенчатого волновода

V	n_{02}	$n_{02} - n_{02}^{average}$	n_{21}	$n_{21} - n_{21}^{average}$	n_{40}	$n_{40} - n_{40}^{average}$
8	1.4449	-2.7×10^{-3}	1.4467	-8.6×10^{-4}	1.4520	4.4×10^{-3}
12	1.4623	-1.6×10^{-3}	1.4632	-7.6×10^{-4}	1.4665	2.5×10^{-3}
17	1.4707	-8.4×10^{-4}	1.4712	-4.0×10^{-4}	1.4729	1.2×10^{-3}
22	1.4743	-5.1×10^{-4}	1.4746	-2.4×10^{-4}	1.4756	7.6×10^{-4}
27	1.4761	-3.4×10^{-4}	1.4763	-1.6×10^{-4}	1.4770	5.1×10^{-4}

Таблица 3.2: Значения эффективного показателя преломления $n_{\nu\mu}(V)$ для мод с групповым номером 5 для ступенчатого волновода

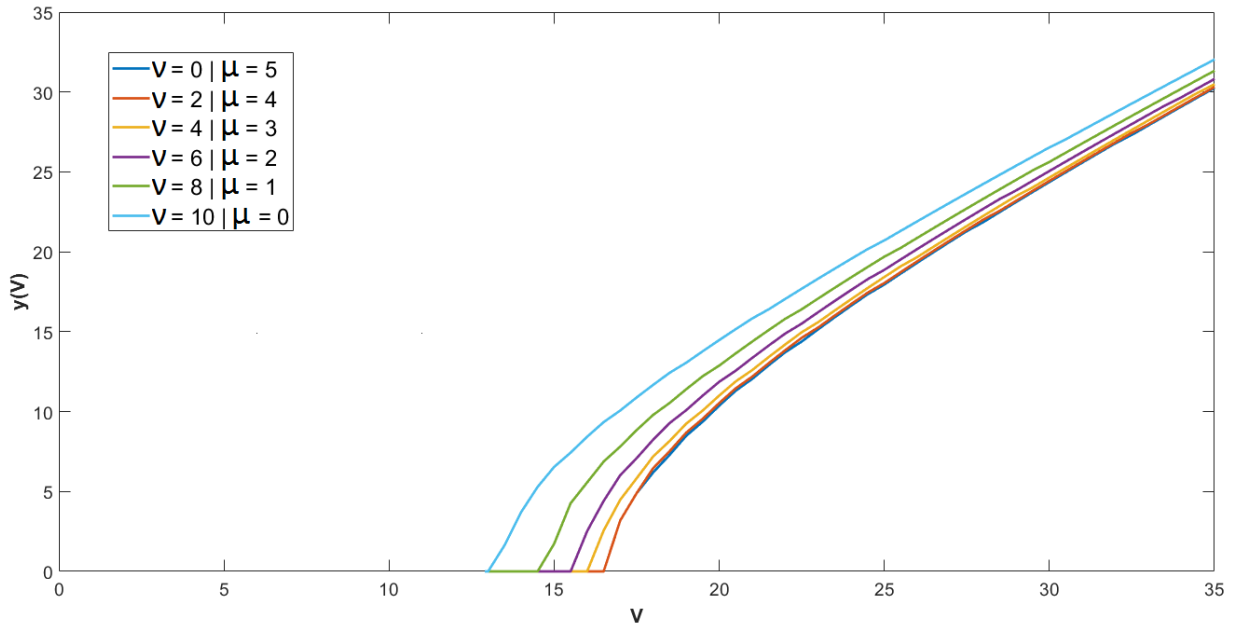


Рис. 3.6: График поведения $y(V)$ для мод с групповым номером 11 для ступенчатого волновода

ν	0	2	4	6	8	10
μ	5	4	3	2	1	0
V_{cutoff}	16.69	16.5	16.3	15.8	14.9	13.4

Таблица 3.3: Частоты отсечки мод из модовой группы с групповым номером 11 для ступенчатого волновода

V	n_{05}	$n_{05} - n_{05}^{average}$	n_{24}	$n_{24} - n_{24}^{average}$	n_{43}	$n_{43} - n_{43}^{average}$
17	1.4414	-1.9×10^{-3}	1.4414	-1.9×10^{-3}	1.4428	-6.0×10^{-4}
22	1.4556	-1.8×10^{-3}	1.4559	-1.5×10^{-3}	1.4568	-6.8×10^{-4}
27	1.4635	-1.2×10^{-3}	1.4637	-1.0×10^{-3}	1.4642	-4.7×10^{-4}
32	1.4681	-8.8×10^{-4}	1.4682	-7.4×10^{-4}	1.4686	-3.4×10^{-4}
V	n_{62}	$n_{62} - n_{62}^{average}$	n_{81}	$n_{81} - n_{81}^{average}$	$n_{10\ 0}$	$n_{10\ 0} - n_{10\ 0}^{average}$
17	1.4450	1.6×10^{-3}	1.4485	5.1×10^{-3}	1.4541	1.0×10^{-2}
22	1.4584	9.5×10^{-4}	1.4607	3.3×10^{-3}	1.4641	6.6×10^{-3}
27	1.4653	6.2×10^{-4}	1.4669	2.1×10^{-3}	1.4693	4.6×10^{-3}
32	1.4694	4.4×10^{-4}	1.4705	1.5×10^{-3}	1.4723	3.2×10^{-3}

Таблица 3.4: Значения эффективного показателя преломления $n_{\nu\mu}(V)$ для мод из модовой группы с групповым номером 11 для ступенчатого волновода

Проведем анализ, аналогичный проведенному нами в главе 2, увидим что

1. Наименьшие значения эффективных показателей преломления $n_{\nu\mu}$ при прочих равных характерны для мод с малыми ν и большими μ , а наибольшие - для мод с наибольшими ν и наибольшими μ .
2. Расхождение от среднего $n_{\nu\mu}(V)$ в группе слабо зависит от V .
3. Частоты отсечек в обоих случаях тем меньше, чем больше значение индекса ν (меньше значение μ).

3.3 Сравнение со случаем квадратичного профиля

В случае ступенчатого волновода с увеличением частоты V разброс между $n_{\nu\mu}$ в группе уменьшается слабо, порядок разброса не изменяется. Существование модовой группы является нашим предположением.

С другой стороны, в случае квадратичного волновода с увеличением частоты V разброс между $n_{\nu\mu}$ в группе уменьшается на порядки. Понятие модовой группы в этом случае возникло вследствие решения модельной задачи.

Как можно видеть из графика зависимостей $y(V)$, для двух мод с одинаковыми модовыми номерами (**Рис. 3.7**) частоты отсечек V_{cutoff} и общее поведение $y(V)$ сильно разнятся для этих двух случаев. Также можно заметить, что значения $y(V)$ для мод из модовых групп с одинаковыми номерами меньше в случае квадратичного показателя преломления. Из чего, зная (2.26), можно заключить, что одинаковые моды будут при прочих равных иметь меньший эффективный показатель преломления в волноводе с квадратичным профилем показателя преломления, чем в волноводе со ступенчатым.

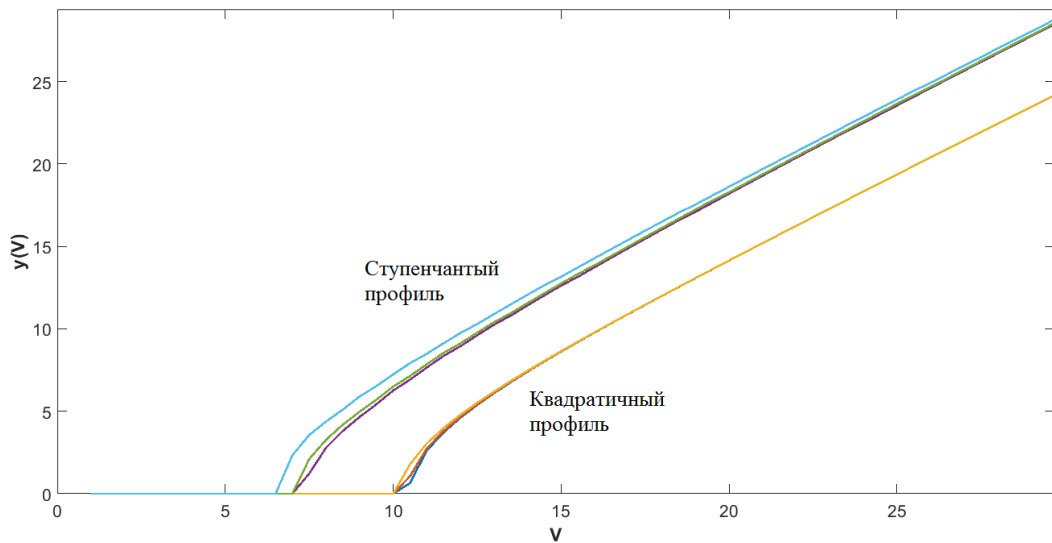


Рис. 3.7: График поведения $y(V)$ для двух модовых групп с одинаковым групповым номером (5) для ступенчатого и квадратичного профиля показателя преломления

Теперь сравним нормированные плотности распределения поля моды для в случаях квадратичного и ступенчатого профиля показателя преломления. Из графиков (**Рис. 3.8**) и (**Рис. 3.9**) можно видеть, что в случае квадратичного профиля показателя преломления поле локализовано в центре, в то время как в случае ступенчатого волновода поле более равномерно распределено по волноводу.

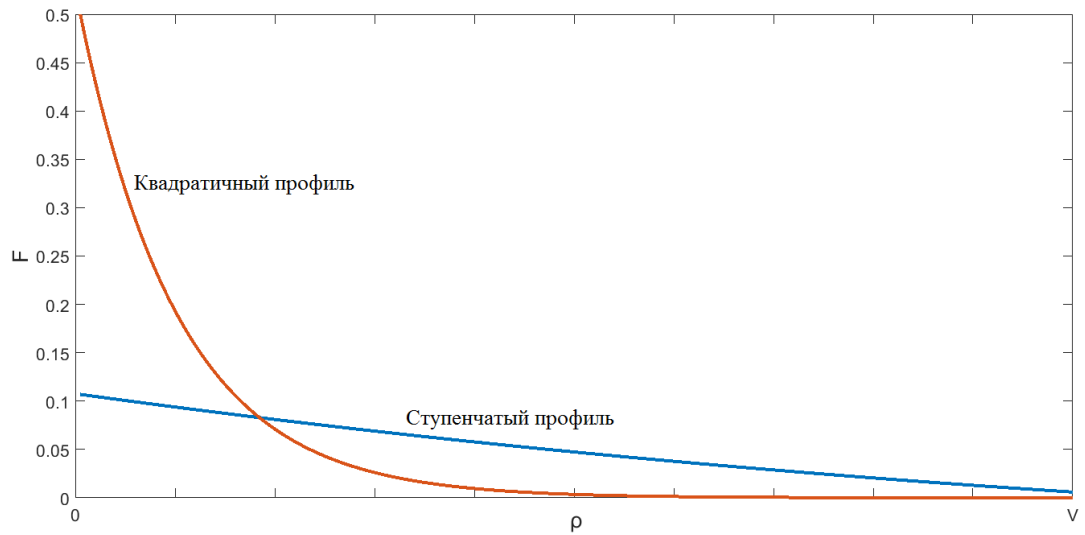


Рис. 3.8: Сравнительный график поведения $F_{\nu\mu}(\rho)$ для моды $0\ 0$ в случаях квадратичного и ступенчатого профиля показателя преломления

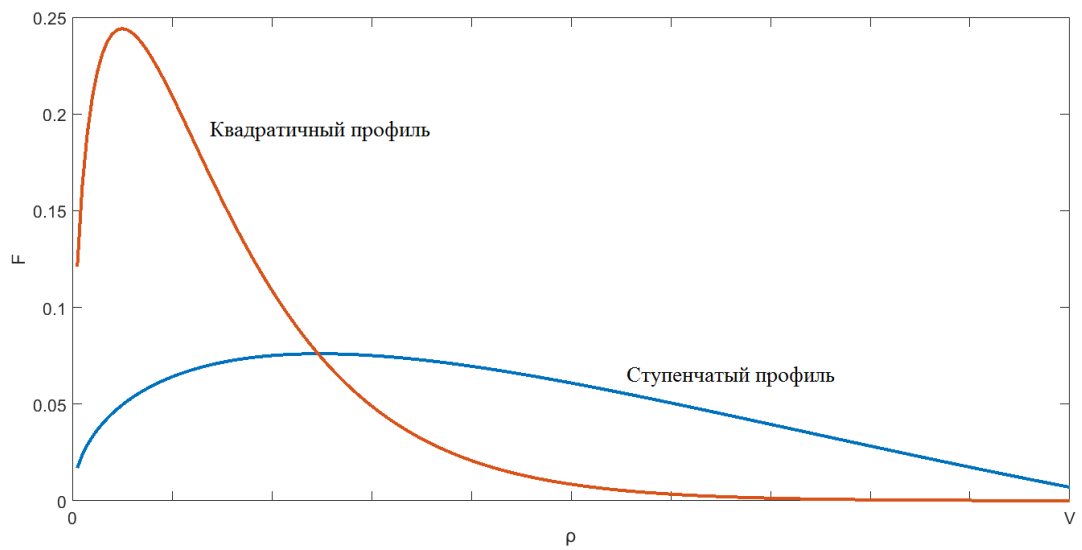


Рис. 3.9: Сравнительный график поведения $F_{\nu\mu}(\rho)$ для моды $1\ 0$ в случаях квадратичного и ступенчатого профиля показателя преломления

ГЛАВА 4

Оценки параметров распространения для импульсов большой мощности

Полное волновое поле импульса в волноводе выглядит как

$$\Pi = F(r) \cdot U(z, \theta) \cdot e^{i\nu\phi} \cdot e^{i(\beta_{\nu\mu}z - \omega t)}, \text{ где } \theta = \gamma_{\nu\mu}z - \omega t. \quad (4.1)$$

В этом уравнении $F(r)e^{i\nu\phi}$ - радиальное распределение поля импульса, $e^{i(\beta_{\nu\mu}z - \omega t)}$ - монохромная волна заполнения импульса, $U(z, \theta)$ - огибающая импульса. $\beta_{\nu\mu}$ - константа распространения волны заполнения (несущей), $\gamma_{\nu\mu}$ - константа распространения огибающей. Константы распространения связаны с фазовыми скоростями волны и огибающей, а следовательно, фазовые скорости несущей и огибающей не равны между собой – это типичная ситуация нелинейного волнового процесса.

В предыдущих главах нами были найдены распределения поля $F(r)$ для волноводов с квадратичным и ступенчатым профилем показателя преломления и константы распространения мод $\beta_{\nu\mu}$.

Можно показать [15], что константы распространения $\beta_{\nu\mu}$ и $\gamma_{\nu\mu}$ связаны соотношением

$$\gamma_{\nu\mu} = \beta_{\nu\mu} + \frac{1}{\beta_{\nu\mu}} \int_0^\infty r \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial r} \right)^2 dr, \quad (4.2)$$

где \tilde{F} - радиальное распределение поля моды в поперечном сечении, нормированное по правилу

$$\int_0^\infty r \tilde{F}^2 dr = 1 \quad (4.3)$$

С помощью выражения (4.2) можно найти константы распространения огибающих. Заметим, что для мод из одной модовой группы распределения поля \tilde{F} отличаются слабо, а следовательно, $\gamma_{\nu\mu}$ для этих мод будут различаться между собой приблизительно так же, как $\beta_{\nu\mu}$ (по крайней мере по порядку величины).

Огибающая $U(z, \theta)$ подчиняется нелинейному уравнению Шредингера с коэффициентами, выражаемыми формулами из работы [15]. Солитонное решение этого уравнения описывает эволюцию огибающей импульса большой мощности в волноводе с диэлектрическим заполнением.

Заключение

В результате проделанной работы нами были решены задачи анализа структуры модовых групп в цилиндрических диэлектрических волноводах и были выполнены следующие задачи:

1. Определены закономерности поведения констант распространения мод одной модовой группы в волноводах с квадратичным и ступенчатым профилем показателя преломления в зависимости от физических параметров волновода.
2. Проведен анализ полученных закономерностей и исследован феномен модовых групп в волноводах со квадратичным и ступенчатым профилем показателя преломления.
 - В волноводе с квадратичным профилем показателя преломления оценено расщепление мод в модовых группах, полученных путем аналитического решения модельной задачи.
 - В волноводе со ступенчатым профилем показателя преломления удалось объединить моды в модовые группы. Был оценен разброс эффективных показателей преломления мод от среднего в своей модовой группе.
3. Проведена оценка разброса эффективных показателей преломления для мод состоящих в одной модовой группе.
4. Произведено сравнение модовых групп для волноводов с квадратичным профилем показателя преломления с учетом влияния оболочки и для волноводов со ступенчатым показателем преломления.
5. Предложена методика оценки параметров огибающей импульса большой мощности, распространяющегося по волноводу рассмотренного типа.

На основании проделанного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Для волновода с квадратичным профилем показателя преломления учет оболочки имеет практическое значение лишь в случае близости частоты распространения моды к частоте отсечки. В случае удаления частоты распространения от частоты отсечки (что чаще наблюдается в многомодовых волноводах) модель волновода без учета оболочки дает адекватное описание распространения моды.

2. Для волновода со ступенчатым показателем преломления понятие модовой группы не может использоваться в "чистом" смысле из-за значительного разброса эффективных показателей преломления мод в модовой группе даже на удалении частоты распространения от частоты отсечки (порядка $10^{-3} - 10^{-4}$). Тем не менее это понятие все еще может использоваться в случае модовых групп с малыми групповыми номерами, где разброс эффективных показателей преломления мод в модовой группе значительно меньше чем разница между средними показателями преломления в соседних группах.

Приложение

При решении уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{П.1})$$

Запишем анзатц решения как

$$u = e^{i(\beta_{\nu\mu} z - \omega t)} e^{i\nu\phi} F_{\nu\mu}(r) \quad (\text{П.2})$$

Тогда уравнение на радиальную составляющую анзатца перепишется как

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + k_r^2 F = 0 \quad (\text{П.3})$$

$$k_r^2 = k^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \quad (\text{П.4})$$

Запишем выражение для волноводного показателя преломления $n(r)$

$$n^2(r) = n_0^2(1 - 2\Delta(r/a)^2), \quad (\text{П.5})$$

где $\Delta = \frac{n_0^2 - n_1^2}{2n_0^2}$, a — радиус волновода.

В этом случае показатель преломления n становится отрицательным при $r = \frac{a}{\sqrt{a\Delta}}$ и уходит на минус бесконечность. Такая модель волновода с параболическим профилем показателя преломления, тем не менее, может быть использована для адекватного предсказания примерного поведения мод в реальном волноводе, так как энергия мод по большей части сосредоточена в центре волновода (будет показано далее), и быстро убывает по мере удаления от него. Следовательно, в рамках решения данной задачи погрешность вносимую нефизичностью модели при больших радиусах можно считать несущественной.

В этом случае радиальное волновое число волновода с неограниченным параболическим профилем запишется как

$$k_r^2 = k^2 n_0^2(1 - 2\Delta(r/a)^2) - \beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \quad (\text{П.6})$$

При подстановке полученного k_r^2 в уравнение мы получим уравнение (2.13), записанное в переменной r , для которого решение известно [13], и оно запишется как

$$F(r) = \left(\sqrt{2} \frac{r}{\psi} \right)^\nu L_\mu^{(\nu)} \left(2 \frac{r^2}{\psi^2} \right) e^{-r^2/\psi^2}, \quad (\text{П.7})$$

где $L_\mu^{(\nu)}$ — обобщенные полиномы Лагерра

$$L_{\mu}^{(\nu)}(x) = \sum_{i=0}^{\mu} (-1)^i \frac{(\mu + \nu)!}{(\nu - i)! (\mu - i)! i!} x^i. \quad (\text{П.8})$$

Параметр ψ связан с радиусом профиля a , показателем преломления n_0 на оси волновода и с относительным показателем преломления Δ как

$$\psi = (2a/n_0 k \sqrt{(2\Delta)})^{1/2} \quad (\text{П.9})$$

Из выражения для поля (П.7) можно видеть, что радиальное распределение поля, представляющее из себя обобщенный полином Лагерра, умножается на Гауссову функцию e^{-r^2/ψ^2} . Эта функция имеет максимум в точке $r = 0$, и уменьшается в e раз на расстоянии $r = \psi$. Следовательно, для адекватной оценки распространения световой моды в волноводе достаточно учитывать лишь поле, заключенное близко к оси волновода. Зная выражение для поля (П.7) можно записать выражение для возможных постоянных распространений $\beta_{\nu\mu}^2 = k^2 n_0^2 - \frac{2V}{a^2} (2\mu + \nu + 1)$, возникающих при решении дифференциального уравнения [4].

Благодарность

Исследования были проведены с использованием вычислительных ресурсов Ресурсного Центра "Вычислительный центр СПбГУ"

Литература

- [1] F. P. Kapron, D. B. Keck, R. D. Maurer Radiation losses in glass optical waveguides. // Appl. Phys. Lett. 17, 423, 1970.
- [2] D. Marcuse Principles of optical fiber measurements. Academic, 1981.
- [3] Д. Маркузе Оптические волноводы, пер. с английского В.В.Шевченко. МИР 1974.
- [4] H. G. Unger, Planar Optical Waveguides and Fibres. Oxford University Press, 1877.
- [5] Hong Ma, Alex K.-Y. Jen, L. R. Dalton Polymer-Based Optical Waveguides: Materials, Processing, and Devices. // Adv. Mater. 14, No. 19, 2002, October 2.
- [6] R. Ryf, N. K. Fontaine, H. Chen, B. Guan, B. Huang, M. Esmaeelpour, A. H. Gnauck, S. Randel, S. J. B. Yoo, A.M.J. Koonen, R. Shubochkin, Y. Sun, and R. Lingle, Jr. Mode-multiplexed transmission over conventional graded-index multi-mode fibers // Optics Express 235 Vol. 23, No. 1, 12 Jan 2015.
- [7] K. Lenge, X. Insou, P. Jian, N. Barrle, B. Denolle, L. Bramerie, and G. Labroille 4×10 Gbit/s bidirectional transmission over 2 km of conventional graded-index OM1 multimode fiber using mode group division multiplexing // Optics Express 28594 Vol. 24, No. 25, 12 Dec 2016.
- [8] V. Kachhatiya, S. Prince, Downstream performance analysis and optimization of the next generation passive optical network stage 2 (NG-PON2) // Optics and Laser Technology 104 90–102, 2018.
- [9] Takaaki Ishigure, Keishiro Shitanda, Yutaro Oizumi Index-profile design for low-loss crossed multimode waveguide for optical printed circuit board // Optics Express 22262 Vol. 23, No. 17, 24 Aug 2015.
- [10] J. M. White and P. F. Heidrich, Optical waveguide refractive index profiles determined from measurement of mode indices: a simple analysis // Appl. Opt. 15, 151-155, 1976.
- [11] M. J. Lahart, Propagation modes in a cylindrical dielectric waveguide with radially varying permittivity // J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 16, No. 3, March 1999.
- [12] M. A. Bisyarin, O. I. Kotov, A. H. Hartog, L. B. Liokumovich, N. A. Ushakov, Rayleigh backscattering from the fundamental mode in multimode optical fibers. // Applied Optics Vol. 55, No. 19, July 1 2016.

- [13] M. Abramowitz, and I. Stegun. Handbook of Mathematical Functions, June 1964.
- [14] M. A. Bisyarin, O. I. Kotov, A. H. Hartog, L. B. Liokumovich, N. A. Ushakov, Rayleigh backscattering from the fundamental mode in step-index multimode optical fibers. // Applied Optics Vol. 56, No. 2, January 10 2017.
- [15] M. A. Bisyarin, I. A. Molotkov, Subpicosecond pulse propagation in optical fibres with transverse and longitudinal inhomogeneities // Chaos, Solitons and Fractals 17 297–304, 2003.